研究会報告

19. 量子カオスの動的摂動活性

京大・理，基研* 足立聡，戸田幹人，池田研介*

古典カオスにおいては，記憶の喪失，つまりmixingの発生が本質的である。ところが古典極限でカオスを示すべき量子系（簡単のため量子カオス系と称する。）ではmixingはおろか，古典的に保証されたエルゴード性の存在すらおぼつかない。この性質は，水素原子やハロゲン化水素の多光子吸収によるイオン化や解離化学反応での分子内緩和過程等々量子カオスが絡む現象に顔を出し，エルゴード理論的観点からのみならず実験的観点からも極めて興味深い。

外界からごくわずかな雑音が加わる，あるいは古典量の観測を行えば，量子カオスが古典性を回復する可能性があることは既に示した。それではカオスの本質とも言えるmixing的性質も外界から導入された雑音によって回復されるだろうか？更にいくつかの量子カオス系が結合しておれば，１つの系にとっては他の系は古典雑音と等価な混合性を保証してくれるだろうか？そのために最少限必要な自由度はいくつだろうか？（このことは，少数自由度量子カオス系が波束の収れんを保証するか？という問いと等価である。）我々はこのような観点から，量子カオスにおける混合性の起源に関心をいだいてきた。本論では，最も単純な1.5自由度の系（外部から周期的摂動のかかった1自由度系）の量子カオスを例にとり，それが外界から導入された雑音に対して古典カオスと等価な混合性を獲得しうることを示す。

雑音強度の変化に対して量子カオスが混合性を回復してゆく特性のことを仮に動的摂動活性とよぼう。どのようにして系の動的な摂動活性を定量化できるだろうか？最も正統的な方法は既に提案した量子リアプノフ数を測定する，あるいは相関々数の減衰特性に注目することであろう。しかし残念ながら両者とも数値的な計測は技術的に極めて困難である。そこで我々は系の時間反転特性に注目する。いま，系をハミルトニアンに従って雑音を印加しつつ時間発展させる。そしてある時刻Tで時間反転する。もちろん往路と還路の過程で雑音に対する時間反転は行わない。このようにして時刻0で到達した状態に対する物理量の期待値と，始状態での期待値の差の雑音過程に対するアンサンブル平均を求める。この量はアンサンブル平均されたなまくらな量ではあるが，以下に示すように系の記憶喪失の度合を極めて鋭敏に反映する。

もし系が古典系ならば，少くとも2つのタイムスケールT_{C1}，T_{C2}が存在する。T_{C1}は記憶喪失がおこるタイムスケールでεを雑音強度として$T_{C1} \sim \log \varepsilon/\alpha$（$\alpha$：リアプノフ数），$T_{C2}$は系をトラップしている chaotic manifold からの雑音による拡散が重要になるタイム

スケールで，$T_{C2} \sim 1/\varepsilon^2$ である。$\varepsilon \to 0$ ではこの2つのタイムスケールははなはだしく異なるゆえ，$T_{C1} \ll T \ll T_{C2}$ となるよう T をとるならば（たとえば $T \sim O(1/\varepsilon)$）ε が有限になったとたん終状態と始状態の差は0から有限値にジャンプする筈である。この不連続変化がカオスによる記憶喪失を特徴づけている。可積分系では，この量は $\varepsilon \to 0$ で連続的に0に収束する。

ここでは，カオスによって運動量空間での homogeneous な拡散が誘起される standard map 系を例にとって時間反転特性を研究しよう。この系のハミルトニアンは θ，p を位置，運動量演算子として

$$(1)\quad H = \frac{p^2}{2} + K\cos\theta \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n + \phi_n)$$

のように表される。ここに ϕ_n は周期外力に導入された位相雑音で平均振幅は ε である。位相熱音の効果は拡散がおこる p 方向のコヒーレンスを直接に破壊するので直観的描像をえやすいという利点があるために採用した。

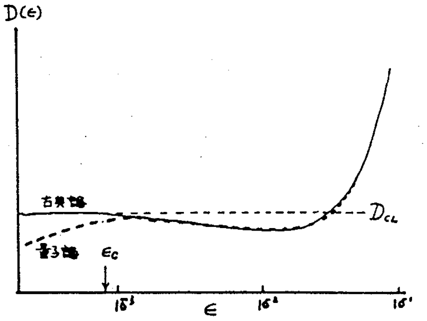
系(1)の古典版は $K > K_C = 0.97\cdots$ でカオス拡散をひきおこす。今時刻 T に於て反転したとき，$<p^2>_{終状態}$ と $<p^2>_{始状態}$ の差は $T \to \infty$ で拡散定数 $D(\varepsilon)$ を用いて

$$D(\varepsilon) = \lim_{T\to\infty} \frac{<p^2>_{終} - <p^2>_{始}}{2T}$$

なる性質をもつことが確められている。この性質は古典論，量子論を問わず成立する。従って反転特性は拡散係数 $D(\varepsilon)$ で特徴づけることができて，通常の系のように反転時刻の任意性にわずらわされない利点がある。古典系では $D(\varepsilon)$ は次のようにふるまうだろう：

$$(2)\quad \begin{cases} \text{可積分領域}\,(K < K_C) & D(\varepsilon) \propto \varepsilon^2 \quad (\varepsilon \ll 1) \\ \text{非可積分領域}\,(K > K_C) & D(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & (\varepsilon = 0) \\ D_{CL} & (\varepsilon \neq 0 \text{ 且 } \varepsilon \ll 1) \end{cases} \end{cases}$$

さて量子論ではどうなるだろうか？量子系が point spectrum をもつ限り，（このことは系(1)ではつねに保証されている。）雑音 ε の効果は摂動論で記述できる筈である。実際 $K < K_C$ では $D(\varepsilon) \propto \varepsilon^2$ となりしかもその係数は古典論のそれと非常によく一致する。問題は $K > K_C$ の時である。かなり大きい ε の値に対する反転特性を図－1に示す。明らかに古典論の挙動が細部に至るまで再現されていることがわかる。特に注目すべきは，$\varepsilon > \varepsilon_C$ では古典論の結果同様いったん増加した $D(\varepsilon)$ が再び減少にうつり，次に本



図－1　古典混合性の回復特性（ε：ほどほどに大）

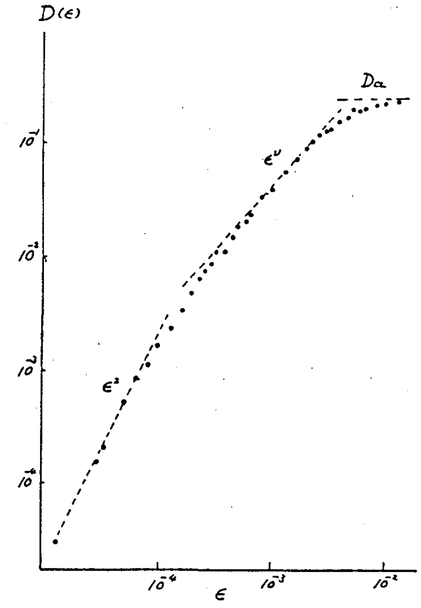
格的な増大を示す点であろう。古典論のDがこのような挙動を示す理由は，次のように説明される。カオス拡散は，homoclinic 交差がつくりだしたひきのばしとおりたたみによるブラウン運動に起因する。十分大きい雑音はこのような構造を破壊する。このためにDが低下したのである。（低下の後の増大は，単に雑音拡散がカオス拡散に加勢したトリビアルな現象である。）雑音を加えた量子系が古典論のこのような挙動を完全に模倣できるということは，雑音によっていったん homoclinic 交差がつくりだされ，しかるのちに破壊されたことを意味する。即ち，雑音がカオス特有の精妙な構造を回復したのである。

εには臨界値ε_Cが存在し$\varepsilon > \varepsilon_C$では古典の混合特性が完璧に再現される。しかし$\varepsilon < \varepsilon_C$では量子系特有のふるまいが観察される。この領域では実験的に測定可能な範囲にわたって

(3)　$D(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\nu}$，　$\nu \approx 1.0 \pm 0.1$

という奇妙なふるまいが見出された。

この奇妙な挙動はいかなる小さいεでも観測されるのだろうか？もしそうならば量子カオス系でも摂動論が破綻していることになる。少くとも有限の$\hbar$をもつ系でそのようなことはありえない。十分小さなεの値での測定を実行するためには，運動量空間を有限サイズ化したために端から入りこんでくる round off error を除くようにしなければならない。我々は系を運動量空間に関しても周期境界化する手法でこの誤差を除くことができた。又この手法をとることによって時間発展の計算にスペクトル法の採用が可能になり，系のＣＰＵ time が著しく短縮化（約1/60）されたため，信頼のおける程度のサンプル平均操作が可能になった。このようにしてえられたデータの一例を図－2に示す。明らかに，$D(\varepsilon)$はεの小さい極限でε^2挙動を示し，ある$\varepsilon = \varepsilon_T$で$\varepsilon^{\nu}$へのクロスオーバがおこる。これらの事実は次のことを意味している：量子系である限り，非可積分領域でも十分小さな動的摂動に対して摂動論が成り立つ。しかしその収束半径は可積分領域に較べて（$\varepsilon \sim O(1)$）著しく小さい。ε_Tが収束半径を特徴づける摂動強度を表わしている。ε_C，ε_Tは夫々$O(\hbar^2)$，$O(\hbar^4)$である。



図－2　古典混合性の回復特性（全ε）

古典論では不連続なジャンプにみえる$\varepsilon = 0$は，量子論的にはこのような構造をもって

いるのである。まとめると$K>K_{\mathrm{C}}$では

$$\varepsilon < \varepsilon_T \quad \to D(\varepsilon) \propto \varepsilon^2 \quad (\text{摂動領域})$$
$$\varepsilon_T < \varepsilon < \varepsilon_{\mathrm{C}} \to D(\varepsilon) \propto \varepsilon^{\nu} \quad (\ ?\ )$$
$$\varepsilon > \varepsilon_{\mathrm{C}} \quad \to D(\varepsilon) = D_{\mathrm{CL}} \quad (\text{古典領域})$$

?の領域は古典カオスでもなければ量子摂動論でも表されない量子カオス特有の regimeである。このような挙動があらわれる内的な機構についてはかなりのことがわかってきたが，詳細は後日にゆずる。